

HOJA DE TRABAJO No. 3
TEMA: SUCESIONES Y SERIES

OBJETIVO: Reforzar las clases magistrales asociando la teoría con la práctica como herramientas de aplicación en los diversos problemas de naturaleza matemática. Se recomienda recordar los siguientes conceptos:

Una Sucesión, es un conjunto de números conocidos como *términos*, los cuales se encuentran ordenados conforme una ley o una regla. Por estar los términos ordenados de una manera definida, es factible encontrar el valor de ellos una vez esté determinado el primero. Las sucesiones pueden ser finitas o infinitas y pueden manifestarse como progresiones aritméticas o progresiones geométricas.

Una progresión aritmética es una sucesión de números reales, donde dado un número inicial identificado como *primer término*, es factible obtener los términos siguientes a éste, al sumarle un valor constante llamado *diferencia*.

Una progresión geométrica, también es una sucesión de números reales, donde dado un número inicial identificado como *primer término*, es factible obtener los términos siguientes a éste, multiplicándole por un valor constante llamado *razón*.

Fórmulas utilizadas

PROGRESIONES ARITMÉTICAS	PROGRESIONES GEOMÉTRICAS
$a_n = a_1 + (n - 1)d$	$g_n = g_1 r^{n-1}$
$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$	$S_n = \frac{g_1 - g_n r}{1 - r}$
$S_n = \frac{n[2a_1 + (n - 1)d]}{2}$	$S_n = \frac{g_1 - g_1 r^n}{1 - r} = \frac{g_1(1 - r^n)}{1 - r}$

I. CALCULE LO SOLICITADO EN LAS PROGRESIONES ARITMÉTICAS

- 1.1 La suma del segundo y el sexto término es 10, mientras que la diferencia del quinto con el octavo término es -15. ¿Cuál es el valor de cada término? R. $a_2 = -5; a_5 = 10; a_6 = 15; a_8 = 25$
- 1.2 El valor del tercer término, si $S_8 = 90$ y el undécimo término es 40. R. 0
- 1.3 El valor de n, cuando: a) $S_n = 90, a_4 = 5, a_7 = 20$ b) $S_n = -33, a_6 = -3, d = 0.2$ R. a) 9, b) 11 & 30
- 1.4 S_4 , si el sexto término es 15 y el segundo es -5 R. -10
- 1.5 S_7 , si la suma de a_6 con a_4 es 20 y la diferencia de a_8 y a_3 es 25 R. 35
- 1.6 El valor del último término si el primero es -10, $n = 9$ y $S_n = 90$ R. 30
- 1.7 Si $S_n = 45/4, a_4 = 6/4$ y $a_7 = 3/4$, determine a_1, a_6 y n. R. $a_1 = 1/4, a_6 = 1, n = 9$
- 1.8 En una progresión aritmética existen tres medios entre $1/2$ y $3/2$. ¿Cuáles son? R. $3/4, 1$ y $5/4$
- 1.9 ¿Cuántos enteros divisibles entre 6 hay entre 31 y 394? ¿Cuánto suman? R. $n = 60; S_n = 12,780$

II. CALCULE LO SOLICITADO EN LAS PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

- 2.1 En la progresión 512, 256, 128, determine g_6 y S_9 R. 16 & 1022
- 2.2 Para $g_n = 2, n = 8$ y $g_1 = 256$, determine S_n y S_4 R. 510 & 480
- 2.3 En $g_2 = 20$ y $g_6 = 20/81$, determine el valor de r R. 1/3
- 2.4 Si $g_6 = -60$ y $g_2 = -20/27$, determine S_3 R. 140/81
- 2.5 En $S_n = 3367/64, r = 3/4$, y $g_n = 243/64$, determine g_1 y n R. 16 & 6
- 2.6 Halle la suma de la progresión 9, -3, 1,, -1/2, 187 R. 14,762/2,187
- 2.7 Halle el valor de x para que la sucesión $x+1, x-5, x+4$ sea progresión geométrica. R. 7/5
- 2.8 Para $g_1 = 2$ y $r = 3/5$, determine $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ R. 5
- 2.9 Interpole tres medios geométricos entre 6 y 2/27 R. 2, 2/3, 2/9

III. OPERE Y SIMPLIFIQUE AL MÁXIMO

- 3.1 $4!$ 3.2 $5! 0!$ 3.3 $3!5!7! / 4!5!3!0!$ 3.4 $100,000! / 99,999!$ 3.5 $n! / (n-2)!$ 3.6 $(2n+2)! / 2n!$
 R. 3.1 24; 3.2 120; 3.3 210 d)24; 3.4 100,000 3.5 $n(n-1)$ 3.6 $(2n+2)(2n+1)$

IV. EXPANDA CADA SUMATORIA Y DETERMINE SU VALOR

- 4.1 $\sum_{k=1}^4 (-2)^k$ 4.2 $\sum_{k=0}^3 k(k-2)$ 4.3 $\sum_{k=2}^5 3 / (k+1)$ R. 4.1 10; 4.2 2; 4.3 57/20
 4.4 $\sum_{k=0}^4 (k-1)(k-3)$ 4.5 $\sum_{k=0}^3 [1 + (-1)^k]$ 4.6 $\sum_{k=3}^5 (1-k)^k / (-1)^k (k-1)$ R. 4.4 5; 4.5 5; 4.6 -33

V. EXPRESE EN SU FORMA COMPACTA CADA SUMATORIA

- 5.1 $3 + 5 + 7 + 11$ 5.2 $4 - 6 + 8 - 10$ 5.3 $1 + 3 + 5 + \dots + 75$ 5.4 $2 + 4 + 6 + \dots + 152$
 5.5 $-6/11 + 9/15 - 12/19 + 15/23$ 5.6 $5/13 + 10/11 + 15/9 + 20/7$ 5.7 $1/2 + 3/8 + 7/24 + 15/64 + \dots$

VI. OPERE LO SOLICITADO EN CADA BINOMIO

- 6.1 Expandir cada binomio: 6.1.1 $(2x - y)^5$ 6.1.2 $(1/x^2 + 3x)^6$ 6.1.3 $(x/3 + y^2)^5$ 6.1.4 $(\sqrt{x} - 1/\sqrt{x})^4$

6.2 Aplicando fórmula, determine los términos solicitados en cada binomio proporcionado

- 6.2.1) $(x^2 - 2y^3)^5$ a) Términos centrales ; b) último término c) Término que contiene y^6
 6.2.2) $(2x^6 + x^5)^{10}$ a) Término medio; b) Penúltimo término; c) Primer término
 6.2.3) $(3x^2 - \sqrt{y})^5$ a) Quinto término; b) Décimo término c) Antepenúltimo término.

VII. RESUELVA CADA CASO CON BASE EN LA PROGRESIÓN QUE CONSIDERA APLICABLE

- 8.1 La Dirección del Programa Hídrico del MAGA recientemente declaró en un diario escrito que de 84 millones de metros cúbicos de agua disponible en el país, 34 millones de metros cúbicos ya están contaminados y para el año 2,025, si nada se hace, estarán contaminados 68 millones de metros cúbicos. ¿Cuál es el factor anual de contaminación en que se basa la proyección? R. 1.037155
 8.2 Un beneficio de café húmedo usa una planta de tratamiento de aguas servidas. El agua tratada cae en uno de sus depósitos receptores, que ya cuenta con una cantidad inicial de líquido reciclado. Si se abre una llave que lo alimenta con un caudal constante, a los seis minutos el depósito tiene 240 galones y a los 18 minutos ya lleva 480 galones. Calcule: a) La cantidad de agua que el tanque recibe por minuto; b) La cantidad inicial de agua en el depósito. R. a) 20 galones b) 120 galones.
 8.3 Luego de la tormenta tropical Stan, en los lugares afectados por inundaciones se tomaron muestras de agua para determinar si era apta para el consumo de la población. En una comunidad, la muestra de agua examinada contenía una población de 10,000 bacterias del mismo tipo y se comprobó que el número de éstas aumentaba 20 % cada hora. Determinar: a) La fórmula que permita hallar el número $N(t)$ de bacterias después de t horas. b) ¿Cuántas bacterias habían en la muestra al término de 10 horas? R. a) $10,000(1.20)^t$ b) 61,917
 8.4 Una persona desea ahorrar guardando un centavo el primer día, dos centavos el segundo, cuatro el tercero y así sucesivamente. a) Si continúa duplicando la cantidad guardada todos los días, ¿cuánto debe guardar al decimoquinto día? b) ¿Qué cantidad tendría ahorrada al término de 30 días? R. a) Q. 163.84 b) Q. 10,737,418.23