

HOJA DE TRABAJO No. 6  
DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN

I LÍMITES

Determine el límite (si existe) de las siguientes funciones.

1.  $\lim_{x \rightarrow -1} 2x^3 - x + 1$

2.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3}$

3.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4}$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+4)^2 - 16}{x}$

5.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$

6.  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 3x^2 - 2x - 6}{x^3 + 3x^2 - 3x - 9}$

7.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

8.  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} \frac{x^4 - 10x^2 + 25}{5 - x^2}$

9.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x^2 + 2}{1 + x - 3x^4}$

10.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^5 + 4x^3 - 1}{8x^4 - x^3 + 2}$

11.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 6}{2x^6 - x - 1}$

12.  $\lim_{x \rightarrow -1/3} \frac{27x^3 + 27x^2 + 9x + 1}{9x^2 + 6x + 1}$

Respuestas:

- 1) 0; 2) 7; 3) 3; 4) 8; 5) 3; -6) 7/6; 7) 12 8) 0 9) -1/3 10)  $\infty$  11) 0 12) 0

II APLIQUE EL TEOREMA RELATIVO A CADA FUNCIÓN DADA Y OBTENGA LA PRIMERA DERIVADA.

1.  $f(x) = (x^3 + 1)(x + 2)$

2.  $f(x) = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 2x + 1)$

3.  $f(x) = (3x + 2) / (x + 2)^{1/2} \quad \forall x \neq -2$

4.  $f(x) = (4x - 1) / (5x + 3) \quad \forall x \neq -3/5$

5.  $f(x) = (x^2 + a)^3 / (x^3 - a)^2 \quad \forall x \neq a^{1/3}$

6.  $f(x) = 4x^6 + 2x^5 - 3x^4 - 5x^3 + x^2 + x - 100$

Respuestas:

1)  $4x^3 + 6x^2 + 1$

2)  $4x^3 + 6x^2 - 2$

3)  $(3x + 10) \sqrt{x + 2} / 2(x + 2)^2$

4)  $17 / (5x + 3)^2$

5)  $-6ax(x^3 + a)(x + 1) / (x^2 - a)^5$

6)  $24x^5 + 10x^4 - 12x^3 - 15x^2 + 2x + 1$

III APLIQUE EL TEOREMA EN CADA FUNCIÓN PARA CALCULAR LA SEGUNDA DERIVADA.

1.  $f(x) = 2(3x^2 + 5)^3$

2.  $f(x) = (2x - 1)^4$

3.  $f(x) = 4x(2x - 1)^5$

Respuestas:

1)  $1620x^4 + 3240x^2 + 900$

2)  $f(x) = 48(2x - 1)^2$

3)  $f(x) = 10(2x - 1)^3(42x - 5)$

IV. POR DERIVADAS SUCESIVAS, CALCULE:

1.  $f^{IV}(x) = 4x^5 + x^4 - 2x^3$

R.  $480x + 24$

$f^V(x) = x^6 + x^4 - 3x$

R.  $720x$

## APLICACIONES DE LA DERIVADA

### I. ENCUENTRE LAS ECUACIONES DE LAS RECTAS TANGENTES Y NORMALES EN LA ABCISCA CORRESPONDIENTE A CADA FUNCIÓN INDICADA.

- |                                                 |                                                      |
|-------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| 1. $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$ en $x = -1/2$    | R. $y_{tg} = -1/4 x - 5/4$ $y_N = 4x + 7/8$          |
| 2. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 3$ en $x = 0$     | R. $y_{tg} = 2x + 3$ $y_N = -1/2 x + 3$              |
| 3. $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ en $x = 2$     | R. $y_{tg} = 50x - 69$ $y_N = -1/50 x + 776/25$      |
| 4. $f(x) = 4x^3 - 13x^2 + 4x - 3$ en $x = -1/3$ | R. $y_{tg} = 14x + 116/27$ $y_N = -1/14 x - 149/378$ |
| 5. $f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 2x + 1$ en $x = -1$    | R. $y_{tg} = 3x + 1$ $y_N = -1/3 x - 7/3$            |

### II. CALCULE LOS INTERVALOS EN QUE CRECE Y DECRECE CADA FUNCIÓN Y SUS PUNTOS MÁXIMOS Y MÍNIMOS.

- |                                        |                                                                                                                  |
|----------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $f(x) = x^2 - 4x + 4$               | R. Dec. $(-\infty, 2)$ Crec. $(2, \infty)$ Min: $(2, 0)$                                                         |
| 2. $f(x) = 1/3 x^3 - 1/2 x^2 - 2x$     | R. Crec. $(-\infty, -1)$ & $(2, \infty)$ Dec $(-1, 2)$ Min. $(2, -10/3)$ Max. $(-1, 7/6)$                        |
| 3. $f(x) = x^3 + 5/2 x^2 - 2x + 1$     | R. Crec. $(-\infty, -2)$ & $(1/3, \infty)$ Dec. $(-2, 1/3)$ Min. $(1/3, 35/54)$ ; Max. $(-2, 7)$                 |
| 4. $f(x) = x^4 - 52/3 x^3 + 60x^2 - 1$ | R. Dec $(-\infty, 0)$ & $(3, 10)$ Crec. $(0, 3)$ & $(10, \infty)$ Min $(0, -1)$ & $(10, -4003)$ Max $(3, 152)$   |
| 5. $f(x) = (x-1)^3 (x+2)^2$            | R. Crec $(-\infty, -2)$ , $(-4/5, 1)$ & $(1, \infty)$ Dec. $(-2, -4/5)$ Max. $(-2, 0)$ Min $(-4/5, -26244/3125)$ |

### III. CALCULE LOS PUNTOS DE INFLEXIÓN Y LAS CONCAVIDADES EN LAS FUNCIONES.

- |                                    |                                                                                                                                              |
|------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $f(x) = x^2 - 8x$               | R. PI. No tiene. Hacia arriba: R                                                                                                             |
| 2. $f(x) = 2x^3 - 24x + 5$         | R. PI $(0, 5)$ Hacia abajo: $(-\infty, 0)$ Hacia arriba: $(0, \infty)$                                                                       |
| 3. $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 5$   | R. PI $(1, 16)$ Hacia arriba: $(-\infty, 1)$ Hacia abajo: $(1, \infty)$                                                                      |
| 4. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 13$ | R. PI $(1/2, -15/2)$ Hacia abajo: $(-\infty, 1/2)$ Hacia arriba: $(1/2, \infty)$                                                             |
| 5. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 16x^2$    | R. PI $(4/3, -256/9)$ & $(-2/3, -144/27)$ Hacia arriba: $(-\infty, -2/3)$ & $(4/3, \infty)$ Hacia abajo: $(-\infty, -2/3)$ & $(4/3, \infty)$ |

### IV. CALCULE LA INTEGRAL O ANTIDERIVADA EN

- |                                             |                                             |
|---------------------------------------------|---------------------------------------------|
| 1. $\int \sqrt{x} dx$                       | R. $4/5 x^{5/4} + C$                        |
| 2. $\int (\sqrt{x^3 + 10}) dx$              | R. $1/2 x^4 + 10x + C$                      |
| 3. $\int (5x^4 - 15x^3 - 5x^2 + 2x - 1) dx$ | R. $x^5 - 15/4 x^4 - 5/3 x^3 + x^2 - x + C$ |

### V. Se le plantean dos problemas, uno de maximización de ingresos y otro de protección de un ecosistema marino, que deberá resolver utilizando el instrumental matemático de esta hoja.

- 5.1. (**Maximización de ingresos**) La demanda del producto de una compañía varía con el precio que ésta cobra por el producto. Si se ha determinado que los ingresos anuales R (en miles de quetzales) son una función del precio p (en quetzales), y el modelo funcional de los ingresos,  $R = f(p) = -50 p^2 + 500 p$ , establezca: a) El precio que debe cobrarse con el fin de maximizar los ingresos totales. R. Q. 5.00 b) El valor máximo de los ingresos totales anuales de la compañía. R. Q. 1,250 miles.

- 5.2. (**Protección de zonas marinas y costeras**). Se cuenta con 2,000 yardas de malla que serán utilizadas para encerrar en tres lados, el máximo de área rectangular de un manglar (ecosistema marino y costero), con el fin de proteger y conservar su biodiversidad. Determine las dimensiones de x (ancho) y de y (largo) que darán como resultado el área de protección mayor. ¿Cuál es el área máxima a proteger y conservar? Sugerencia: Recuerde que  $x + 2y = 2,000$   
R.  $x = 1000$  yardas;  $y = 500$  yardas. Área = 500,000 yardas<sup>2</sup>